

Title	Dirichlet 級数の q-analogue について(代数的数論 : 最近の進展とその背景)
Author(s)	津村, 博文
Citation	数理解析研究所講究録 (1993), 844: 50-57
Issue Date	1993-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/83604
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Dirichlet 級数の q -analogue について

青山学院高等部 津村 博文 (Hirofumi Tsumura)

§ 0. Introduction

複素数 q, u について, Carlitz は q -Bernoulli 数 $\{\beta_k(q)\}$ と u に付随した q -Euler 数 $\{H_k(u, q)\}$ を次のように定義した。

$$\beta_0(q) = 1, \quad \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} q^{j+1} \beta_j(q) - \beta_k(q) = \begin{cases} 1 & (k=1) \\ 0 & (k \geq 2) \end{cases}$$

$$H_0(u, q) = 1, \quad \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} q^j H_j(u, q) - u H_k(u, q) = 0 \quad (k \geq 1).$$

([2] 参照). とくに $q \rightarrow 1$ のとき $\beta_k(q) \rightarrow B_k$, $H_k(u, q) \rightarrow H_k(u)$ となる。ここで $\{B_k\}$ と $\{H_k(u)\}$ は 各々次の式で定義される Bernoulli 数, Euler 数である。

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!},$$

$$\frac{1-u}{e^t - u} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(u) \frac{t^k}{k!}.$$

[4] において, Koblitz は p -進 L -関数の q -analogue である $L_{p,q}(s, \chi)$ を構成し, 次の 2 つの問題を提出した。

- (1) Are there complex analytic q - L -series which $L_{p,q}(s, \chi)$ can be viewed as interpolating, in the same way that $L_p(s, \chi)$ interpolates $L(s, \chi)$?
- (2) Do Carlitz's $\beta_k(q)$ occur in the coefficients of some Stirling type series for p -adic or complex analytic q -log- Γ -functions ?

問題 (1) については、佐藤潤也氏により、また問題 (2) の p -adic case については、筆者により解答があたえられた ([5],[7] 参照)。

この小文では、§1 において、問題 (2) の complex case についての解答をあたえる。すなわち $\log -\Gamma$ -関数の q -analogue である関数 $G(x, q)$ を構成し、その関数を使って佐藤氏の定義した q -L-series $L_q(s, \chi)$ の正の整数での値をあらわす。これらの関係式は Dirichlet-L-級数と $\log -\Gamma$ -関数 との古典的な関係式の q -analogue とみなせる。すなわち $G(x, q)$ は上記の問題 (2) が求めている $\log -\Gamma$ -関数の q -analogue と考えられる。(詳細は [8] 参照) §2 においては、Riemann ζ -関数 $\zeta(s)$ (をひねった級数) の q -analogue を考え、その性質を調べることにより、 $\zeta(s)$ の正の整数における値の間の関係式 (漸化式) を求める。系として $\zeta(2) = \pi^2/6$ や $\zeta(4) = \pi^4/90$ などの古典的關係式や、 $\zeta(3)$ の級数表現などが得られる。同様の手法を使えば、Dirichlet L-級数の正の整数における値も求められる。(詳細は [9] 参照)

§ 1. $\log -\Gamma$ -関数の q -analogue

$\mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ を各々 有理整数環, 実数体, 複素数体とする。 $q, u \in \mathbf{C}$ を各々 $|q| < 1$, $|u| > 1$ とする。このとき $z \in \mathbf{C}$ に対し $[z] = [z; q] = (1 - q^z)/(1 - q)$ とかく。仮定から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n] = \frac{1}{1 - q}. \quad (1.1)$$

そこで、 $s \in \mathbf{C}$ に対し

$$\ell(s, u, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{-n}}{[n]^s} \quad (1.2)$$

とおく。

LEMMA 1. $\ell(s, u, q)$ は全平面で正則であり、 $k \geq 0$ となる $k \in \mathbf{Z}$ に対し、

$$\ell(-k, u, q) = \begin{cases} \frac{1}{u-1} & (k=0) \\ \frac{u}{u-1} H_k(u, q) & (k \geq 1) \end{cases}$$

Proof. [5] 参照。

そこで, つぎのような関数を定義する。

$$g(x, u, q) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{-n} (x + [n]) \log(x + [n]). \quad (1.3)$$

条件 $|u| > 1$ から, $g(x, u, q)$ は locally analytic である。Lemma 1 と (1.3) から次の命題をえる。

PROPOSITION 1. $|x| > 1/(1 - |q|)^2$ となる $x \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned} g(x, u, q) = & \frac{u}{u-1} \left\{ x \log x + \frac{1}{u-q} (\log x + 1) \right\} \\ & + \frac{u}{u-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} H_{k+1}(u, q) \frac{1}{x^k}. \end{aligned}$$

COROLLARY 1. $|x| > 1/(1 - |q|)^2$ となる $x \in \mathbb{C}$ に対し,

$$g'(x, u, q) = \frac{u}{u-1} (\log x + 1) + \frac{u}{u-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} H_k(u, q) \frac{1}{x^k},$$

ここで $g'(x, u, q) = \frac{d}{dx} g(x, u, q)$ とする。

佐藤氏により, q -Riemann ζ -関数が, 次のように定義された。([5] 参照)

$$\zeta_q(s) = \frac{2-s}{s-1} (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{[n]^{s-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{[n]^s}. \quad (1.6)$$

LEMMA 2. $\zeta_q(s)$ は $s = 1$ のみで 1 位の極をもつ有理型関数で, $k \geq 1$ となる $k \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\zeta_q(1-k) = \begin{cases} q\beta_1(q) & (k=1) \\ -\frac{\beta_k(q)}{k} & (k \geq 2) \end{cases}$$

Proof. [5] 参照。

Lemma 1, Lemma 2 と (1.6) から, $k \geq 2$ となる $k \in \mathbf{C}$ に対し, 次の関係式をえる。

$$-\frac{\beta_k(q)}{k} = -\frac{k+1}{k}H_k(q^{-1}, q) + \frac{1}{1-q}H_{k-1}(q^{-1}, q). \quad (2.2)$$

そこで $G(x, q)$ を

$$G(x, q) = (qx - x - 1)g'(x, q^{-1}, q) + 2(1 - q)g(x, q^{-1}, q) + \frac{1}{1 + q} \quad (2.3)$$

と定義すると, 次の命題をえる。

PROPOSITION 2. $|x| > 1/(1 - |q|)^2$ となる $x \in \mathbf{C}$ に対し,

$$G(x, q) = \left(x - \frac{1}{1+q}\right) \log x - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} \beta_{k+1}(q) \frac{1}{x^k}.$$

REMARK. Proposition 2 の結果は, 古典的な漸近級数展開 ([10] 参照)

$$\log \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} \sim \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} B_{k+1} \frac{1}{x^k}$$

の q -analogue とみることができる。

$r \geq 1$ となる $r \in \mathbf{Z}$ について $\frac{d^r}{dx^r} f(x)$ を簡単に $f^{(r)}(x)$ とかくことにする。(1.3) から次の補題をえる。

LEMMA 3. $r \geq 2$ となる $r \in \mathbf{Z}$ に対し,

$$\frac{(-1)^r}{(r-2)!} g^{(r)}(x, u, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{-n}}{(x + [n])^{r-1}}.$$

ここで, 佐藤氏の q -L-series を考える。

$$L_q(s, \chi) = \frac{2-s}{s-1} (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \chi(n)}{[n]^{s-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \chi(n)}{[n]^s}, \quad (1.9)$$

ただし χ は primitive Dirichlet character で 導手は f とする。この関数が Koblitz の問題 (1) の解答になっている。([4],[5] 参照)

$k \geq 2$ となる $k \in \mathbf{Z}$ について, 帰納的に

$$G^{(k)}(x, q) = (qx - x - 1)g^{(k+1)}(x, q^{-1}, q) + (1 - q)(2 - k)g^{(k)}(x, q^{-1}, q) \quad (3.3)$$

が示されるので, Lemma 3 と (1.9) より, 次の命題をえる。

PROPOSITION 3. $k \geq 2$ となる $k \in \mathbf{Z}$ に対し

$$L_q(k, \chi) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \frac{1}{[f]^k} \sum_{a=1}^f q^{a(2-k)} \chi(a) G^{(k)}(q^{-a} \frac{[a]}{[f]}, q^f)$$

REMARK. Lemma 3 と (1.9) より, $k \geq 2$ について

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} G^{(k)}(x, q) &= \frac{2-k}{k-1} (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(x+[n])^{k-1}} \\ &\quad + (1+x-qx) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(x+[n])^k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

をえる。これは古典的な関係式

$$\frac{(-1)^k}{(k-1)!} \frac{d^k}{dx^k} \log \Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$$

の q -analogue と考えられる。これらのことから, $G(x, q)$ は $\log -\Gamma$ -関数 の q -analogue と考えられる。

§ 2. $\zeta(s)$ の正の整数における値について

以下, q を $q \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{2} \leq q < 1$ とする。また $c \geq 1$ となる $c \in \mathbf{Z}$ について

$$F(t, c, q) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(-q^{-c}, q) \frac{t^k}{k!}$$

とおく。[5] より

$$F(t, c, q) = (1 + q^c) \sum_{n=0}^{\infty} (-q^c)^n e^{[n]t} \quad (2.2)$$

とかける。よって $F(t, c, q)$ は t について、全平面で正則である。とくに $1/2 \leq q \leq 1$ のときも、 $F(t, c, q)$ は $|t| < \pi$ の範囲で t について正則であるから、次の補題をえる。

LEMMA 4. $\frac{\pi}{2} \leq r < \pi$ となる任意の r に対し、定数 $M(c, r)$ が存在して、

$$\left| \frac{H_k(-q^{-c}, q)}{k!} \right| \leq M(c, r) \left(\frac{1}{r} \right)^k. \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

そこで $\ell(s) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n / n^s$ とおくと、次の補題がえられる。ただし E_n は $E_n = H_n(-1)$ (§0 参照) である。注として $E_{2n} = 0$ ($n \geq 1$) である。

LEMMA 5. $k \geq 1$ となる $k \in \mathbf{Z}$ と、 $|\theta| \leq \pi$ となる $\theta \in \mathbf{R}$ に対し、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k}} \cos(n\theta) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j)!} \ell(2k-2j) - \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{2(2k)!}. \\ (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k+1}} \sin(n\theta) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \theta^{2j+1}}{(2j+1)!} \ell(2k-2j) - \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{2(2k+1)!}. \\ (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k+1}} \cos(n\theta) &= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j)!} \ell(2k+1-2j) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{2(2j)!} E_{2j-1-2k}. \\ (4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k}} \sin(n\theta) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \theta^{2j+1}}{(2j+1)!} \ell(2k-2j-1) + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j+1}}{2(2j+1)!} E_{2j+1-2k}. \end{aligned}$$

PROOF. 容易にわかるように

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2kn}}{[n]^{2k}} \cos([n]\theta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j)!} \ell(2k-2j, -q^{-2k}, q) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j)!} \ell(2k-2j, -q^{-2k}, q) - \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \frac{1}{q^{-2k} + 1} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j)!} \frac{q^{-2k}}{q^{-2k} + 1} H_{2j-2k}(-q^{-2k}, q) \quad (2.4)$$

ただし $k \geq 1, |\theta| < \pi$ 。(2.4) の左辺と右辺の第 1 項は, $q^n/[n] \leq 1/n$ に注意すれば, また右辺の第 3 項は Lemma 4 から $q \in [1/2, 1]$ で一様収束するので, $q \rightarrow 1$ としてよい。 $H_{2j-2k}(-q^{-2k}, q) \rightarrow E_{2j-2k} = 0$ に注意すれば, (1) をえる。(2),(3),(4) も同様に証明できる。

ここで, Lemma 5 において, $\theta = \pi/2$ とすると, 関係式

$$\ell(s) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s),$$

を使えば, 次の命題をえる。

PROPOSITION 4. $k \geq 1$ となる $k \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\begin{aligned} & 2^{-2k}(2^{1-2k} - 1)\zeta(2k) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} (2^{1-2j+2k} - 1)\zeta(2k - 2j) - \frac{(-1)^k}{2(2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 5. $k \geq 1$ となる $k \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\begin{aligned} & 2^{-2k-1}(2^{-2k} - 1)\zeta(2k + 1) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} (2^{2j-2k} - 1)\zeta(2k + 1 - 2j) - \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \log 2 \\ & \quad + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2(2j)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} E_{2j+1-2k}. \end{aligned}$$

REMARK. 上記の命題から, $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, また

$$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{21}(4 \log 2 + \pi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+4)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} E_{2m+1}).$$

などがえられる。 $\zeta(5), \zeta(7)$ などの級数表現も同様にえられる。また Lemma 5 を用いると, 同様にして Dirichlet L-級数の正の整数における値も求められる。([9] 参照)

REFERENCES.

- [1] R.Askey, The q -gamma and q -beta functions, *Applicable anal.*, **8** (1978), 125-141.
- [2] L.Carlitz, q -Bernoulli numbers and polynomials, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 987-1000.
- [3] L.Carlitz, q -Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 332-350.
- [4] N.Koblitz, On Carlitz's q -Bernoulli numbers, *J. Number Theory*, **14** (1982), 332-339.
- [5] J.Satoh, q -analogue of Riemann's ζ -function and q -Euler numbers, *J. Number Theory*, **31** (1989), 346-362.
- [6] H.Tsumura, On the values of a q -analogue of the p -adic L -function, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, **44** (1990), 49-60.
- [7] H.Tsumura, A note on q -analogues of the Dirichlet series and q -Bernoulli numbers, *J. Number Theory*, **39** (1991), 251-256.
- [8] H.Tsumura, On a q -analogue of the $\log - \Gamma$ -function, preprint.
- [9] H.Tsumura, On evaluation of the Dirichlet series at positive integers by q -calculation, preprint.
- [10] E.Whittaker and G.Watson, A course of modern analysis, 4-th ed., Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1958.